דפי גלעד

רשימות במתמטיקה לתלמידי ארכיטקטורה

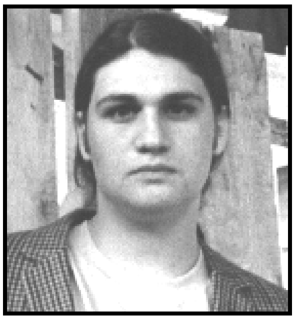
http://www.math.technion.ac.il/~rl/Gilead

צבי הראל

24 בדצמבר 1999

הקדשה

דפים אלה מוקדשים לזכרו של בני האהוב גלעד, סטודנט קורס א׳ בפקולטה לארכיטקטורה ובנוי ערים, שהלך לפתע לעולמו ביומו האחרון של סמסטר האביב תשנ״ו והוא בן 19 בלבד. בהכנתם נעזרתי בזכרונותי משיחות רבות עם גלעד על אודות חלקה של המתמטיקה בלמודי האמנות בכלל ועל אודות ״פרקים במתמטיקה לתלמידי ארכיטקטורה״ – שעדין לא למד – בפרט. תקותי היא כי חבריו, תלמידי קורס ב׳ בשנת תשנ״ז, והסטודנטים בשנים הבאות, יעינו בהם וישכילו לשלב מעט ממה שיספגו ביצירתם האמנותית.



גלעד הראל

תוכן עניינים

רשימת איורים

פרק 1

מהי תורת הגרפים?

אמן או אדריכל, בעובדו על פתוח רעיון מסוים, מבטאו בשלבים המוקדמים באמצעות סקיצה, המתארת אותו בקוים כלליים. ככל שהעבודה מתקדמת יותרת מוסיף המפתח יותר ויותר מבנה: העצמים נראים בפרספקטיבה נכונה, אורך וזוויות נעשים מוגדרים יותר, וכו׳. טווח זה מופיע גם במתמטיקה, בסוגים של הגאומטריה.

בגאומטריה האוקלידית, יש לזוויות ולקטעים גדלים מוגדרים. זה מאפשר לנו להבחין, למשל, בין סוגים שונים של מרובעים: ריבוע, מלבן, מקבילית וכו׳. אולם, יש גם גאומטריה פרויקטיבית, בה למידות מטריות אין משמעות, וצורות נתונות להבחנה רק לפי ״צלליהן״, דהינו היטליהן מנקודות כלשהן. במקרה זה אין להבחין בין סוגים שונים של מרובעים: צילו של רבוע יכול להיות גם מלבן, מקבילית, או אפילו ״מרובע כללי״ אם מקור האור הוא בנקודה סופית! למרות זאת אפשר לנסח, וכמובן גם להוכיח, משפטים שמתיחסים רק למושגים כמו קולינאריות (המצאותן של נקודות על ישר אחד), קונקורנטיות (מעברם של ישרים דרך נקודה אחת) וכו׳. משפט כזה, שאולי מוכר מלמוד הגאומטריה התיאורית, הוא ״משפט ד׳זארג״: המשכי הצלעות המתאימות של שני משולשים במצב פרספקטיבי (דהיינו, משולשים שקודקודיהם המתאימים נמצאים על שלשה ישרים קונקורנטיים) נחתכים בשלוש נקודות קולינאריות.

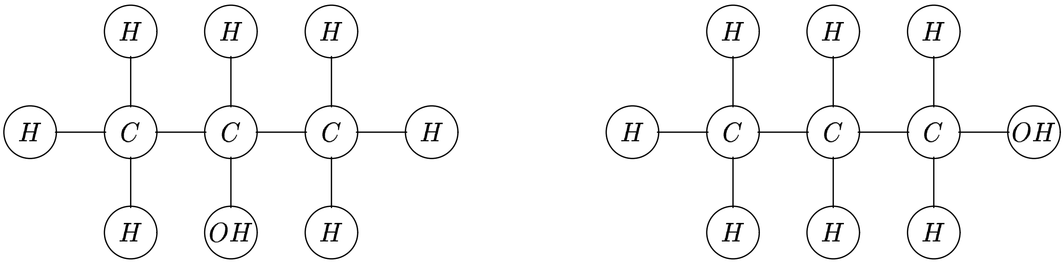
תורת הגרפים, בה נדון כאן, היא ״גיאומטריה של נקודות וקווים״, בה אין כל חשיבות לצורתם של הקווים או לתווי שלהם — יש משמעות רק לשאלה אילו נקודות קשורות זו לזו ואלו אינן. מרובע, למשל, יהיה לא יותר מאשר סידור מחזורי (״ציקלי״) של ארבע נקודות, כך שכל נקודה קשורה לבאה אחריה (והרביעית כמובן לראשונה).

תורת הגרפים פותחה על ידי מתמטיקאים, וכמו במקרה של תורות מתמטיות רבות אחרות, באה לתת מודל אבסטרקטי לתופעות טבעיות סבוכות. המתמטיקאי ארתור קיילי (Arthur Cayley, 1821–95) חפש מודל מתאים לתאור גרפי של תרכובות כימיות, כמו למשל הכוהל הפרופילי C_3H_7OH. יש שתי תרכובות שונות בעלות אותו הרכב אך עם קשרים שונים בין הרכיבים (״איזומרים״, ראה איור 1.1).

כאן, הנקודות מיצגות רכיבים (אטומים, רדיקלים) והקווים קשרים כימיים.

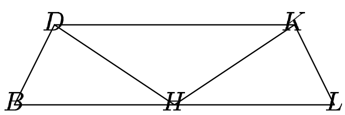
גם בארכיטקטורה משתמשים במודלים מתורת הגרפים, באשר נקודות מיצגות יחידות שונות בדירה וקווים מיצגים אפשרות גישה, למשל (ראה איור 1.2).

תורת הגרפים מנסה לראות אלו מסקנות נתן להוציא מתוך המבנה המינימלי הנ״ל: אלו גרפים יתכנו? אלו בלתי־אפשריים? איך נתן לבנות גרף לפי דרישות נתונות?



איור 1.1: כוהל פרופילי וכוהל איזו־פרופילי

חדר אוכל		מטבח
חדר שנה	חדר כניסה	חדר מגורים



איור 1.2 : גרף גישה

פרק 2

הגדרות וסימונים

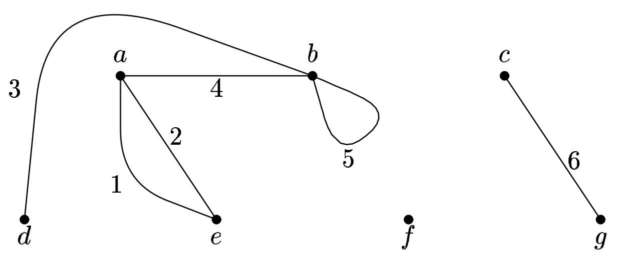
תהי V קבוצה של נקודות, שתקראנה קודקודים (באנגלית – vertices – צורת הרבים של vertex). תהי E קבוצה של קשתות, שתקראנה מקצועות (edges). מולטיגרף G הוא זוג (V, E) של קבוצות כאלה, עם כלל המתאים לכל מקצוע מ־E שני קודקודים מ־V, שנקראים קצותיו. אומרים גם שהמקצוע קושר קודקודים אלה. שני קודקודים מ־V שיש מקצוע מ־E (אחד לפחות) הקושר אותם נקראים שכנים. נוהגים לסמן $G = (V, E)$.

לדוגמה (ראה איור 2.1), המולטיגרף $G = (V, E)$, כאשר $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ו־ $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. המקצועות 1 ו־2 קושרים את הקודקודים A ו־ E. אלה הם מקצועות כפולים. 3 קושר את b ו־ d ו־ 4 קושר את a ו־b. 5 קושר את b לעצמו. מקצוע כזה נקרא לולאה. לבסוף, המקצוע 6 קושר את c ל־ g. הקודקוד f, שאינו קצה לשום מקצוע, הוא קודקוד מבודד.

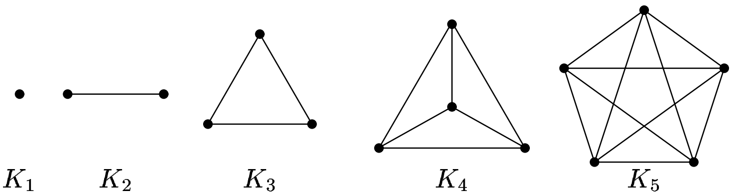
כדי להדגיש את העובדה שאין כל חשיבות למקום הקודקודים או לצורת המקצועות, נתן לתאר את המולטיגרף בצורה מספרית טהורה, המבטאת את יחסי השכנות בין קודקודיו. צורה כזו היא מטריצת השכנות: מערך ריבועי של מספרים, עם שורות ועמודות כמספר הקודקודים. כל שורה, מלמעלה למטה, מתאימה לאחד הקודקודים, בסדר הנתון. בצורה דומה מתאימה גם כל עמודה, משמאל לימין. בהתאמה כזו, המספר המופיע בשורה ה־i ובעמודה ה־j הוא מספר המקצועות הקושרים את הקודקוד ה־i לקודקוד ה־j. למשל, הנה מטריצת השכנות של המולטיגרף G שבאיור 2.1.

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המספר 2 בשורה הראשונה, עמודה חמישית, מתאים לשני המקצועות הקושרים את a ל־e. אותו מספר מופיע גם בשורה החמישית, עמודה ראשונה, כי אותם מקצועות קושרים גם את e ל־a. למקצועות אין כוון, דהיינו אין הבדל בין קצותיהם. אנו אומרים כי המטריצה היא סימטרית. ציר הסימטריה הוא האלכסון הראשי של המטריצה, אותו אלכסון שיורד מהפינה השמאלית העליונה אל הפינה הימנית התחתונה. מספר שונה מ־0 על אלכסון זה, כמו המספר 1 בשורה השניה, עמודה שניה, מבטא קיומה של לולאה במולטיגרף.

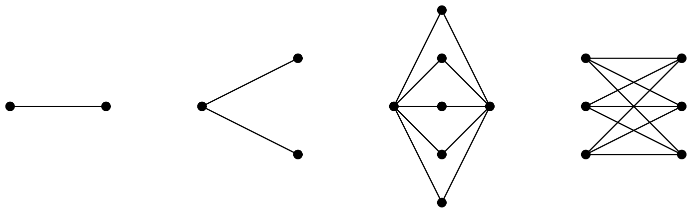


איור 2.1: מולטיגרף



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

איור 2.2: גרפים שלמים



$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{2,5}$ $K_{3,3}$

איור 2.3: גרפים דו־צדדיים שלמים

מטריצת השכנות של המולטיגרף G מסומנת באותו סימון G, כדי להדגיש כי המטריצה היא לא יותר מאשר הצגה אבסטרקטית של המולטיגרף.

נעיר כי לעתים דנים במולטיגרף מכוון, בו נתן להבחין בין הקצוות של מקצוע; כך ניתן לתאר למשל רשת תחבורה, עם נתיבי תנועה חד סיטריים. במקרה כזה מספר המקצועות הקושרים קודקוד a (למשל) לקודקוד b אינו שווה בהכרח לזה בכוון ההפוך, מ־b ל־a, ואז המטריצה לא תהיה סימטרית. אנו לא נדון במולטיגרפים מכוונים.

יתר על כן, בדרך כלל נדון במקרים בהם אין מקצועות כפולים ואין לולאות. מולטיגרף בלי מקצועות כפולים נקרא פסאודוגרף. מטריצת השכנות שלו מורכבת מהמספרים 0 ו־1 בלבד. פסאודוגרף בלי לולאות נקרא גרף. האלכסון הראשי של מטריצת השכנות שלו מתאפס.

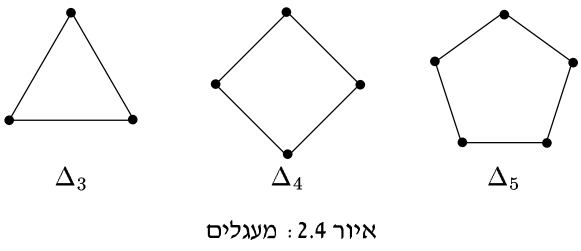
לסיום הפרק נכיר כמה משפחות של גרפים שממלאות תפקיד חשוב בתורת הגרפים: גרפים שלמים, גרפים דו־צדדיים שלמים, מעגלים ומסילות.

גרף שלם מסדר n, מסומן ב־K_n, הוא גרף עם n קודקודים, כך שכל שני קודקודים שונים קשורים על ידי מקצוע. באיור 2.2 אנו מדגימים את K_n עבור $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

אומרים שמולטיגרף הוא דו־צדדי אם נתן למין את קודקודיו לשני סוגים, כך שלכל מקצוע יש קצה אחד מכל סוג. במיוחד, גרף דו־צדדי שלם מסדר m, n, מסומן ב־$K_{m,n}$, הוא גרף עם $m + n$ קודקודים, כך שכל קדקוד מ־m הראשונים קשור לכל קודקוד מ־n האחרים, ואין לו מקצועות נוספים. ברור כי $K_{m,n} = K_{n,m}$ לכל m ו־n טבעיים. באיור 2.3 אנו מדגימים גרפים דו־צדדים שלמים אחדים.

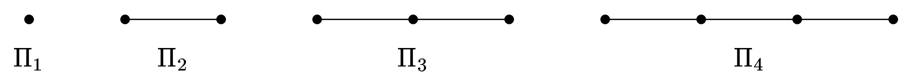
מולטיגרף הוא מעגל מסדר n (או מאורך n), מסומן ב־Δ_n, אם נתן לסדר את קבוצת הקודקודים V ואת קבוצת המקצועות E באופן ציקלי: $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$; $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$; e_1 קושר את x_1 ל־x_2, e_2 קושר את x_2 ל־x_3, . . . , e_n קושר את x_n ל־x_1. לשם הקיצור, נסמן סידור זה ב־$(x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, ..., x_n, e_n, x_1)$. באיור 2.4 אנו מדגימים מעגלים אחדים. נעיר כי Δ_n עבור n גדול מ־2 הוא גרף, בעוד ש־Δ_2 הוא מולטיגרף בעל שני קודקודים הקשורים על־ידי שני מקצועות כפולים, ו־Δ_1 הוא מולטיגרף בעל קודקוד אחד ולולאה.

לבסוף, מסילה מסדר n (או מאורך $n - 1$), מסומנת ב־Π_n, היא גרף שנתן לסדר את קבוצת קודקודיו V ואת קבוצת מקצועותיו E באופן לינארי: $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$; $E = \{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$; e_1 קושר את x_1 ל־x_2, e_2 קושר את x_2 ל־x_3, . . . , e_{n-1} קושר את x_{n-1} ל־x_n.בקיצור, הסידור ירשם כ־$(x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, ..., x_{n-1}, e_{n-1}, x_n)$. באיור 2.5 אנו מדגימים מסילות אחדות.



Δ_3 Δ_4 Δ_5

איור 2.4: מעגלים



איור 2.5 : מסילות

פרק 3

ערכיות

בפרק זה נראה איזו אינפורמציה מספרית נתן לאסוף על גרף ואיך נתן ללמוד מאינפורמציה כזאת על מבנה הגרף. אם נתיחס למולטיגרף שבאיור 2.1, נוכל להתחיל בשימנו לב כי יש לו שבעה קודקודים וששה מקצועות. שני מספרים אלה מגדירים את גודל המולטיגרף. עבור מולטיגרף כללי $G=(V,E)$, נסמן מספרים אלה ב־$|V|$ ו־$|E|$ בהתאמה. למעשה, עבור קבוצה כלשהי S, נוהגים לסמן ב־$|S|$ את מספר אבריה. לדוגמה, K_n, Δ_n ו־Π_n הם בעלי n קודקודים ו־$K_{n,m}$ בעל $n+m$ קודקודים. יתר על כן, בידקו כי ל־K_n יש $n(n-1)/2$ מקצועות, ל־$K_{n,m}$ יש nm מקצועות, ל־Δ_n יש n מקצועות ול־Π_n יש $n-1$ מקצועות.

נוכל ללמוד על מבנה המולטיגרף מאוסף אחר של מספרים, דהיינו, מאוסף מספרי הערכיות של קודקודיו. בשם ערכיות של קודקוד x, נקרא למספר הפעמים בו משתתף x כקצה של מקצוע. מספר זה מסומן ב־$\rho(x)$. נדגיש כי לולאה תורמת 2 לערכיות, כך שבמולטיגרף שבאיור 2.1, b הוא בעל ערכיות ארבע. ערכיותו של a היא שלוש. e הוא דו־ערכי. הקודקודים c, d ו־g הם חד־ערכיים, או תלויים. לבסוף, f הוא בעל ערכיות אפס, או מבודד. את הערכיות ניתן לקבוע מתוך מטריצת השכנות על ידי חיבור אברי השורה המתאימה לקודקוד הנידון, בזוכרנו שאת אבר האלכסון יש לחבר פעמיים.

מולטיגרף שכל קודקודיו בעלי אותה ערכיות ρ יקרא רגולרי. ראינו כבר כמה דוגמאות לכך: K_n הוא גרף רגולרי מערכיות $\rho=n-1$, Δ_n הוא גרף רגולרי מערכיות $\rho=2$ ואילו Π_n אינו רגולרי אלא אם כן $n=1$ ($\rho=0$) או $n=2$ ($\rho=1$). גרף רגולרי תלת־ערכי יקרא קובי. מקור השם הוא בקוביה, שכל אחד משמונה קודקודיה משמש כקצה לשלשה מתוך שנים־עשר מקצועותיה. באיור 3.1 אנו מדגימים גרפים קוביים אחדים.

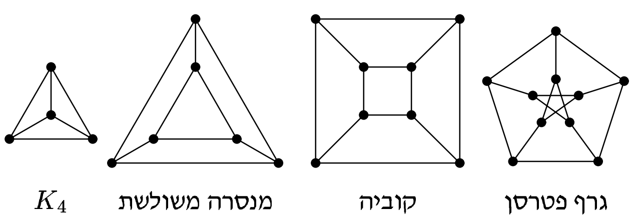
אם נחבר את הערכיות של כל הקודקודים במולטיגרף, נקבל את פעמיים מספר המקצועות. זה לא קשה להווכח: אם נחשוב על חיבור הערכיות כביקור בכל קודקוד בזה אחר זה וספירת המקצועות היוצאים ממנו, נראה כי כל מקצוע נספר פעמיים, פעם אחת מכל אחד מקצותיו. נרשום תוצאה זו בצורה הקומפקטית הבאה:

משפט 3.1 *בכל מולטיגרף* $G=(V,E)$,

$$\Sigma_{x\in V}\rho(x)=2|E|$$

נדגים זאת על המולטיגרף באיור 2.1:

$$\begin{aligned}&\rho(a)+\rho(b)+\rho(c)+\rho(d)+\rho(e)+\rho(f)+\rho(g)=\\&\quad 3+4+1+1+2+0+1=12=2\times 6=2|E|\end{aligned}$$



גרף פטרסן	קוביה	מנסרה משולשת	K_4
$\lvert V\rvert=10$	$\lvert V\rvert=8$	$\lvert V\rvert=6$	$\lvert V\rvert=4$

איור 3.1: גרפים קוביים

ברור מהנוסחה כי סכום הערכיות של קודקודי גרף הוא מספר זוגי. נזכור כי סכום שני מספרים זוגיים או שני מספרים אי־זוגיים הוא זוגי, ואילו הסכום של מספר זוגי אחד ומספר אי־זוגי אחד הוא אי־זוגי. מכאן נובע כי סכום אוסף של מספרים יהיה זוגי רק אם מספר המספרים האי־זוגיים באוסף הינו זוגי. מכאן נוכל להסיק:

משפט 3.2 *בכל גרף, מספר הקודקודים בעלי ערכיות אי זוגית הוא זוגי.*

מסקנה זו נתן גם לנסח בצורה הפופולרית הבאה: מספר האורחים במסיבה המכירים מספר אי־זוגי של אורחים אחרים הוא זוגי!

תרגיל 3.1 *מה תוכלו להגיד על מספר האורחים במסיבה שבה כל אורח מכיר בדיוק ארבעה מהנוכחים האחרים, פרט למארח שמכיר את כל הנוכחים?*

אם לכל קודקודי הגרף אותה ערכיות, נקבל:

משפט 3.3 *במולטיגרף רגולרי עם ערכיות ρ,*

$$\rho|V| = 2|E|$$

במיוחד, בגרף קובי יתקיים בהכרח $3|V| = 2|E|$, מה שמוביל למסקנה כי $|V|$ חייב להיות זוגי. דהינו, אין גרפים קוביים בעלי 5, 7, 9, או כל מספר אי זוגי אחר של קודקודים (השווה לאיור 3.1). כמובן שנוכל גם להסיק כי מספר המקצועות $|E|$ של גרף קובי הוא כפולה של שלוש.

תרגיל 3.2 *האם קיים מולטיגרף רגולרי עם 12 מקצועות וערכיות 4, 5 או 6? התחילו על־ידי רישום כמה קודקודים יש בכל מקרה. אם התשובה חיובית, נסו לבנות מולטיגרף כזה. באלו מקרים יש גרף בעל נתונים אלה?*

פרק 4

עצים

נתבונן עתה במשפחה אחת של גרפים, שנקראים בשם <u>עצים</u>. כדי שנוכל להבין מהו עץ, עלינו להקדים כמה מושגים פשוטים.

יהי $G = (V, E)$ מולטיגרף. מולטיגרף $G' = (V', E')$ הוא תת־מולטיגרף של G (תת־גרף של G אם G הוא גרף) אם $V' \subseteq V$ ו־$E' \subseteq E$, כלומר, אם G' הוא מולטיגרף המורכב מכמה מהקודקודים והמקצועות של G. במיוחד, שני הקצוות של המקצועות ב־E' הם ב־V'.

כמובן למולטיגרף נתון יש תת־מולטיגרפים רבים, וביניהם למשל מסילות Π_n או מעגלים Δ_n מאורכים שונים. אם כל שני קודקודים בגרף ניתנים לקישור על־ידי מסילה, נאמר כי הגרף קשיר. במילים אחרות, הגרף "מורכב מחתיכה אחת".

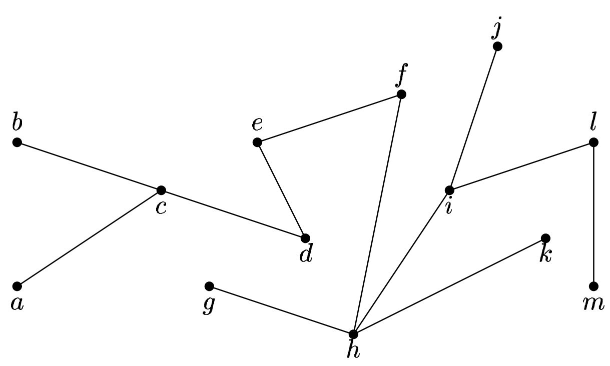
תרגיל 4.1 *מצאו את המעגל הקצר ביותר ואת המעגל הארוך ביותר בגרפים K_n ו־$K_{n,m}$.*

תרגיל 4.2 *הראו כי מולטיגרף הוא דו־צדדי אם ורק אם כל המעגלים בו הם מאורך זוגי.*

הגרפים הפשוטים ביותר הם אלה בלי מעגלים. מולטיגרף קשיר מחוסר מעגלים נקרא בשם <u>עץ</u>. באיור 4.1 אנו מביאים דוגמה לעץ, ובמשפט הבא כמה תכונות חשובות של עצים.

משפט 4.1 *(א) כל תת־מולטיגרף קשיר של עץ הוא עץ.*
(ב) כל עץ הוא גרף.
(ג) כל עץ, פרט לעץ עם קודקוד אחד, מכיל קודקוד תלוי.
(ד) כל עץ ניתן לשרטוט מישורי בלי שמקצועותיו יחתכו.

הוכחה: (א) נכון, כי כל מעגל בתת־מולטיגרף של עץ G הוא מעגל ב־G. לכן, אם ב־G אין מעגלים, גם בכל תת־מולטיגרף שלו אין מעגלים. (ב) נכון, כי לולאות הן מעגלים מאורך 1 וזוג מקצועות כפולים יוצרים מעגל מאורך 2. כדי לברר את (ג), נשים לב כי העץ היחיד עם קודקוד אחד הוא K_1. מחוץ ל־K_1, יהי G עץ כלשהוא. נבחר בקודקוד כלשהו x_1 ונתבונן במסילה הארוכה ביותר המתחילה בו, $(x_1, e_1, x_2, e_2, ..., e_{n-1}, x_n)$. אזי, ברור כי ערכיות x_n היא לפחות אחד. מצד שני, אין היא יכולה להיות יותר מאחד, כי אם היה מקצוע נוסף e הקושר את x_n לקודקוד אחר x (השונה מ־x_1 כי אחרת $(x_1, e_1, x_2, e_2, ..., e_{n-1}, x_n, e, x)$ הוא מעגל ב־G!), היתה מתקבלת מסילה ארוכה יותר $(x_1, e_1, x_2, e_2, ..., e_{n-1}, x_n, e, x)$, בסתירה להנחתנו. לכן, $\rho(x_n) = 1$



איור 4.1: עץ

ו־x_n הוא קודקוד תלוי. הוכחת (ד) מבוססת על אינדוקציה על מספר קודקודי העץ: K_1, העץ היחיד עם קודקוד אחד, הוא חסר מקצועות, ובוודאי נתן לשרטטו במשור בלי חיתוכי מקצועות. יהי G עץ בעל n קודקודים ויהי x קודקוד תלוי, שקיים לפי (ג). אם נסיר את x ואת המקצוע שמכיל אותו מ־G, נקבל תת־גרף קשיר של G שנקרא לו G'. לפי (א), G' הוא עץ ובאינדוקציה ניתן לשרטטו במישור בלי חיתוכי מקצועות. ברור שאת הקודקוד והמקצוע הנותרים נתן להוסיף לשרטוט זה בלי לגרום לחיתוכים.

תרגיל 4.3 *האם תוכלו לבנות עץ בעל קודקוד תלוי אחד בדיוק? שני קדקודים תלויים בדיוק?*

תרגיל 4.4 *בנו את כל העצים בעלי חמישה קודקודים או פחות.*

יש כמה דרכים לאפיין עץ. אחת מהם נתונה במשפט הבא:

משפט 4.2 *יהי $G = (V, E)$ מולטיגרף קשיר. אזי, G הוא עץ אם ורק אם $|V| - |E| = 1$.*

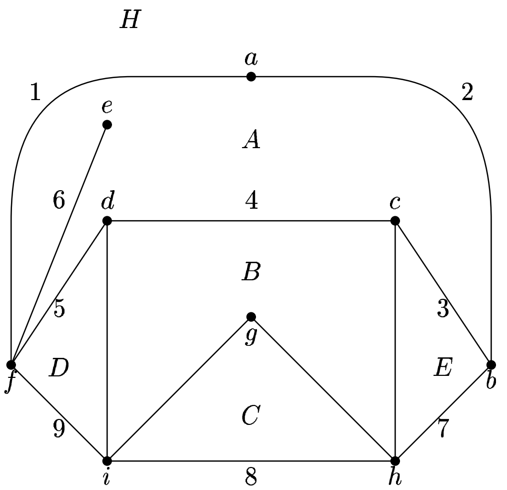
הוכחה: יש להראות את נכונותם של שני כוונים. ראשית, נניח כי G הוא עץ ונחשב את $|V| - |E|$. כמו קודם, נתן ליצור מ־G עץ קטן יותר $G' = (V', E')$ על ידי הסרת קודקוד תלוי והמקצוע המכיל אותו. מאחר ש־$|V'| = |V| - 1$ ו־$|E'| = |E| - 1$ נובע כי $|V| - |E| = |V'| - |E'|$, כלומר, ההפרש בין מספר הקודקודים ומספר המקצועות לא משתנה בתהליך ההסרה. אפשר להמשיך בתהליך עם העץ שהתקבל, וכן הלאה, עד שיתקבל עץ ללא קודקודים תלויים – כלומר K_1. בעץ זה $|V| = 1$ ו־$|E| = 0$, כלומר $|V| - |E| = 1$. לכן, גם בעץ המקורי $|V| - |E| = 1$.

בכוון ההפוך, נעיר קודם כי למולטיגרף שבו $|V| > |E|$ יש בהכרח קודקוד בעל ערכיות הקטנה משניים. כי, אחרת, אם כל קודקוד x מקיים $\rho(x) \geq 2$ נקבל $2|E| = \Sigma_{x \in V}\rho(x) \geq 2|V|$ או $|E| \geq |V|$ בסתירה לנתון. נניח לכן כי $G = (V, E)$ הוא מולטיגרף קשיר המקיים $|V| - |E| = 1$. אזי, $|E| = |V| - 1$ ולפי ההערה יש ל־G קודקוד מערכיות קטנה משניים. מאחר שהקשירות מונעת קודקודים מבודדים (אלא אם כן $G = K_1$), יש ל־G קודקוד תלוי. נסיים בעזרת תהליך זהה לזה שתארנו קודם: אם נסיר את הקודקוד המבודד והמקצוע שמכיל אותו נקבל מולטיגרף קשיר קטן יותר $G' = (V'E')$ המקיים שוב את התנאי $|V'| - |E'| = 1$. נשים לב כי המקצוע שהסרנו אינו יכול להיות חלק ממעגל ב־G ולכן כל מעגל ב־G ישאר גם ב־G'. נחזור על התהליך עד שייתקבל K_1. מאחר ש־K_1 הוא חסר מעגלים, גם המולטיגרף המקורי הוא חסר מעגלים, דהיינו עץ.

תרגיל 4.5 *רשמו סדרה של קודקודים שיש להורידם בזה אחר זה מן העץ שבאיור 4.1 כך שיתקבל K_1.*

פרק 5

מפות מישוריות



איור 5.1: מפה מישורית

בשם גרף מישורי נקרא למולטיגרף שניתן לשרטטו במישור בלי שמקצוע אחד יחתוך את משנהו. לגרפים מישוריים שימוש חשוב בתכנון: לכל תכנית רצפה מתאים גרף מישורי, המתקבל על ידי כך שבכל חלל נבחר קודקוד ונקשור שני קודקודים על ידי מקצוע אם יש גישה ישירה בין שני החללים בתכנית.

נתבונן כעת באיור 5.1. מופיע שם גרף מישורי $G = (V, E)$, עם קבוצת הקודקודים $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ וקבוצת המקצועות $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$ (לא כל המקצועות מסומנים בתוית). בעקבות שרטוט הגרף במישור מתקבלת קבוצת עצמים נוספת ־ קבוצת חלקי המישור שנחתכו ממנו על ידי הגרף. עצמים אלה נקראים פאות (faces) וקבוצת הפאות מסומנת ב־F, לדוגמה $F = \{A, B, C, D, E, H\}$. כל פאה מוגדרת באופן מתמטי על־ידי השפה שלה, שהיא שרשרת קודקודים ומקצועות. במקרים רבים שפת פאה היא מעגל, כמו במקרה של הפאה B בציור ששפתה המעגל שקודקודיו (d, c, h, g, i, d), או הפאה החיצונית H, ששפתה המעגל $(f, 1, a, 2, b, 7, h, 8, i, 9, f)$. לעתים, מקצועות מסוימים בשפת הפאה חוזרים פעמיים, כמו למשל הפאה A ששפתה $(f, 1, a, 2, n, 3, b, 4, d, 5, f, 6, e, 6, f)$ – המקצוע 6 חוזר פעמיים בסדרה!

מפה M תהיה שלשה של קבוצות (V, E, F), כאשר (V, E) הוא מולטיגרף קשיר, כך שכל מקצוע ב־E שיך לשפת שתי פאות ב־F (או לאותה הפאה פעמיים), וכך שיש שרטוט מישורי של (V, E) שפאותיו מתאימות לאברי F.

יש לפאות המפה ולקודקודי גרף כמה תכונות מקבילות. למשל, נגדיר את הערכיות של פאה כמספר המקצועות שיוצרים את שפתה, כאשר מקצועות המשתתפים בשפה פעמיים יספרו פעמיים. ערכיות פאה f תסומן ב־$\rho^*(f)$, כך שבדוגמה, $\rho^*(H) = 5$, $\rho^*(D) = 3$, $\rho^*(A) = 7$. בהגדרה זו מקבל את המשפט:

משפט 5.1 *בכל מפה* $M = (V, E, F)$

$$\Sigma_{f \in F} \rho^*(f) = 2|E|$$

ראינו כבר כי מולטיגרף שכל קודקודיו בעלי אותה ערכיות ρ נקרא רגולרי. מפה שכל קודקודיה בעלי אותה ערכיות ρ נקראת רגולרית בקודקודים, ומפה שכל פאותיה בעלות אותה ערכיות ρ^* נקראת רגולרית בפאות. מפה נקראת רגולרית סתם אם היא רגולרית בפאות ובקודקודים כאחד. כך למשך באיור 3.1 (עמוד 9), המפות המתאימות לקוביה ולגרף K_4 הן רגולריות (עם $\rho^* = 4$ ו־$\rho^* = 3$ בהתאמה, כמובן בנוסף ל־$\rho = 3$). מפות אלה מתאימות לפאונים המשוכללים, או, כפי שהם נקראים לעתים קרובות, הגופים האפלטוניים. כל מפה כזו מקיימת את המשוואות

$$\rho|V| = 2|E| = \rho^*|F|$$

נחזור אליהם בהמשך.

פרק 6

נוסחת אוילר

כפי שכבר ראינו כל עץ הוא גרף מישורי. מאחר שהוא קשיר הוא מגדיר מפה, ומאחר שהוא חסר מעגלים יש במפה זו פאה יחידה, כלומר $|F| = 1$. (זו היא הפאה החיצונית ובשפתה משתתף פעמיים כל אחד ממקצועות העץ, כלומר ערכיותה היא $\rho^* = 2|E|$.) ראינו גם כי כל עץ מקיים את הנוסחה $|V| - |E| = 1$. נוסחה זו כמובן אינה נכונה לגרפים שאינם עצים. אבל, אם נתיחס למפה של העץ, נקבל את הנוסחה $|V| - |E| + |F| = 2$. נוסחה זו מתקיימת לכל המפות, ונקראת <u>נוסחת אוילר</u>, על שם המתמטיקאי השוויצרי לאונרד אוילר (Leonhard Euler, 1707-83).

משפט 6.1 אם $M = (V, E, F)$ *היא מפה, אזי* $|V| - |E| + |F| = 2$.

הוכחה: ראינו כי אם (V, E) עץ, הנוסחה מתקיימת. אם אינו עץ, (V, E) מכיל מעגל. יהי e מקצוע כלשהו של המעגל, ונסיר את e מן הגרף. הגרף שהתקבל יהיה שוב מישורי, עם מקצוע אחד פחות ופאה אחת פחות. נוכל להסיר מקצועות עד שנקבל תת־גרף שהוא עץ. הנוסחה מתקיימת עבור עץ זה. נחזיר עתה את המקצועות בזה אחר זה. עם כל מקצוע שיתווסף, תתווסף גם פאה, לכן $|V| - |E| + |F|$ ישאר שניים.

למרות שנוסחת אוילר היא פשוטה לניסוח ופשוטה להוכחה, היא בעלת חשיבות עצומה. כשימוש ראשון לנוסחה נשים לב, כי אם $G = (V, E)$ גרף מישורי, אזי כל המפות המתקבלות מ־G הן בעלות מספר פאות שווה, דהיינו $|E| - |V| + 2$. שימוש שני יהיה הוכחה קצרה כי הגרפים K_5 ו־$K_{3,3}$ אינם מישוריים.

נניח כי נתן לשרטט את $K_5 = (V, E)$ במישור ולקבל מפה $M = (V, E, F)$. אזי $|V| = 5$ ומתוך $\rho = 4$ נובע $|E| = 10$. מכאן $|F| = |E| - |V| + 2 = 7$. מאחר ש־K_5 הוא מחוסר לולאות ומקצועות כפולים, כל מעגל בו הוא מאורך שלוש לפחות. לכן, לכל פאה f, $3 \leq \rho^*(f)$,

$$21 = 3 \times 7 \leq \Sigma_{f \in F} \rho^*(f) = 2|E| = 20.$$

אבל 21 איננו קטן או שווה מ־20, כלומר ההנחה ש־K_5 מישורי הביאה לסתירה, כלומר ההנחה מוטעית.

במקרה של $K_{3,3}$, יש לנו $|V| = 6$ ומתוך $\rho = 3$ גם $|E| = 9$. לכן, לו היינו יכולים לשרטט אותו במישור ולקבל מפה $M = (V, E, F)$ היתה M מקיימת $|F| = 5$. אבל ל־$K_{3,3}$ אין לולאות, מקצועות כפולים או מעגלים מאורך 3 (בגרף דו צדדי, כל המעגלים הם מאורך זוגי), לכן, לכל פאה f, $4 \leq \rho^*(f)$,

$$20 = 4 \times 5 \leq \Sigma_{f \in F} \rho^*(f) = 2|E| = 18.$$

ושוב סתירה.

כשימוש נוסף למשפט אוילר נראה כיצד נתן למצוא את כל המפות הרגולריות. אם $M = (V, E, F)$ היא מפה רגולרית, אז כל אחד מקודקודיה הוא בעל ערכיות ρ וכל אחת מפאותיה בעלת ערכיות ρ^*. אזי מתקיימות המשוואות

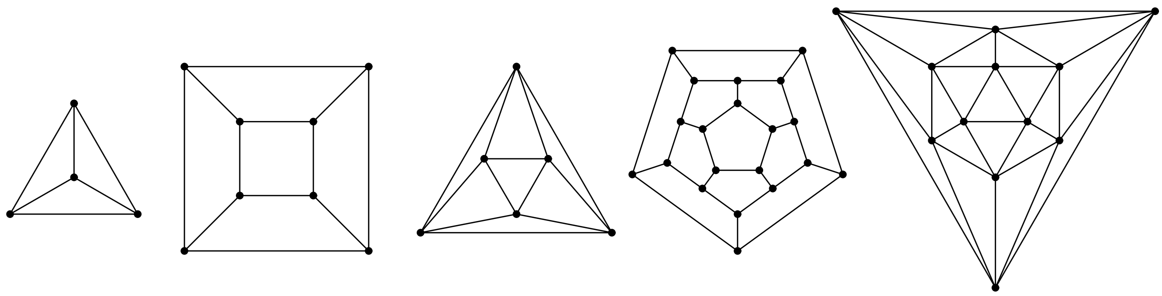
$$\rho|V| = 2|E| = \rho^*|F|$$

נחלץ מכאן את $|V| = 2|E|/\rho$ ו־$|F| = 2|E|/\rho^*$ ונציב בנוסחת אוילר:

$$2 = |V| - |E| + |F| = 2|E|/\rho - |E| + 2|E|/\rho^* = |E|(2/\rho - 1 + 2/\rho^*)$$

או

$$|E| = 2/(2/\rho - 1 + 2/\rho^*) = 2\rho\rho^*/[4 - (\rho - 2)(\rho^* - 2)]$$



איור 6.1: חמש המפות האפלטוניות

נבדוק אילו מספרים ρ ו־ρ^* יגדירו $|E|$ שלם חיובי. ברור כי צריך להתקיים אי־השוויון $(\rho - 2)(\rho^* - 2) < 4$. אם $(\rho - 2)(\rho^* - 2) = 0$, אז או $\rho = 2$ ו־ρ^* מספר שלם חיובי כלשהו, או $\rho^* = 2$ ו־ρ מספר שלם חיובי כלשהו. אם $(\rho - 2)(\rho^* - 2) = 1$, אז $\rho = \rho^* = 3$. אם $(\rho - 2)(\rho^* - 2) = 2$, אז $\rho = 3$ ו־$\rho^* = 4$ או $\rho = 4$ ו־$\rho^* = 3$. אם $(\rho - 2)(\rho^* - 2) = 3$, אז $\rho = 3$ ו־$\rho^* = 5$ או $\rho = 5$ ו־$\rho^* = 3$. נציב את כל האפשרויות בנוסחה ל־$|E|$ ונחשב גם את $|V|$ ו־$|F|$. נקבל את הטבלה הבאה:

ρ	ρ^*	$\lvert E\rvert$	$\lvert V\rvert$	$\lvert F\rvert$
2	n	n	n	2
m	2	m	2	m
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
4	3	12	6	8
3	5	30	20	12
5	3	30	12	20

המפה הראשונה בטבלה מתאימה למעגל באורך n והשניה ל־m מקצועות כפולים. חמש המפות האחרונות מתאימות לחמשת הגופים האפלטוניים, מסודרים לפי מספר פאותיהם: ארבעון, קוביה, תמניון, תריסרון ועשרימון. אלה הן המפות האפלטוניות שבאיור 6.1, מסודרות משמאל לימין.

פרק 7

משפט קורטובסקי ומשפט וויטני

כאשר נתון מולטיגרף $G = (V, E)$, אנו מעוניינים לקבוע אם נתן לשרטט אותו במישור בלי חיתוכי מקצועות, כלומר, האם קיימת מפה $M = (V, E, F)$? ראינו כבר כי התשובה יכולה להיות שלילית, אפילו עבור גרפים בעלי מספר קודקודים קטן כמו חמישה (K_5) או שישה $(K_{3,3})$ קודקודים. אבל, אם התשובה חיובית, זה מוביל לשאלה נוספת: האם יש יותר ממפה אחת ש־G הוא המולטיגרף שלה? לשתי השאלות חשיבות רבה בארכיטקטורה: אם הגרף המתאים לבעיה ארכיטקטונית אינו ניתן לשרטוט במישור, אי אפשר לפתור אותה בלי הוספת פרוזדורים, למשל. כמובן, אם לבעיה אחת נוכל להתאים מפות שונות, נוכל גם לקבל פתרונות שונים מהותית (כלומר, שאינם נתנים לקבלה זה מזה על ידי עוות גרידא). בפרק זה נראה שיטות להחלטה אם מולטיגרף נתון הוא מישורי ולבנית כל המפות המתאימות למולטיגרף מישורי. השיטות מבוססות על שני משפטים עמוקים בתורת הגרפים, שלא נוכל להוכיחם כאן. רק הנסוח שלהם מצריך פיתוח מושגים נוספים. לשם פשטות, אנו נגביל את עצמנו בפרק זה לגרפים: מכל מולטיגרף נתן לקבל גרף על ידי מחיקת הלולאות והפיכת כל קבוצת מקצועות כפולים משותפי קצוות למקצוע בודד. אחרי פתרון הבעיה לגבי הגרף, ניתן תמיד להוסיף את הלולאות ואת המקצועות הכפולים.

תהי $M = (V, E, F)$ מפה ו־e מקצוע כלשהוא. אם הסרת e לא פוגעת בקשירות הגרף (e אינו "גשר" בין שני חלקי הגרף) אזי תתקבל מפה חדשה, עם מקצוע אחד פחות ופאה אחת פחות, אך עדיין מישורית כמובן. אם לעומת זאת בקצה e קודקוד תלוי x, הסרתם של e ו־x יתנו מפה חדשה, עם מקצוע אחד פחות וקודקוד אחד פחות. מאחר שכל תת־גרף קשיר של גרף G יכוך להתקבל באחת מצורות אלה, נקבל:

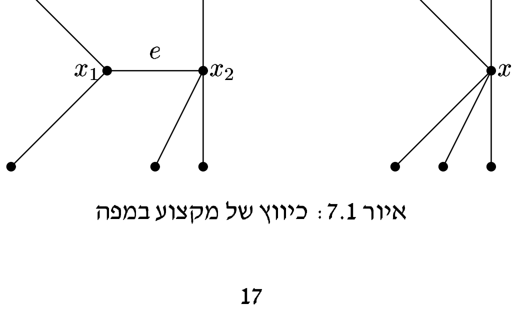
משפט 7.1 *כל תת־גרף קשיר של גרף מישורי הוא מישורי. לחילופין, אם תת־גרף קשיר של גרף G איננו מישורי, גם G אינו מישורי.*

כמסקנה מכך, נובע כי K_n אינו מישורי אם n הוא לפחות 5 (כי K_5 הוא תת־גרף שלו) ו־$K_{n,m}$ איננו מישורי אם n ו־m שניהם לפחות 3 (כי $K_{3,3}$ הוא תת־גרף שלו). שימו לב כי K_1, K_2, K_3, K_4 הם מישוריים, וכך גם $K_{1,m}$ ו־$K_{2,m}$ ל־m כלשהו (איורים 2.2 ו־2.3, עמוד 7).

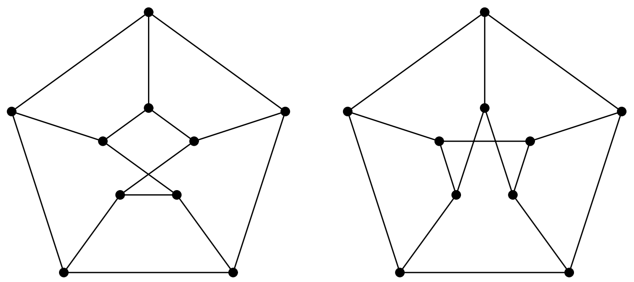
תרגיל 7.1 *הראו שכל גרף בעל חמישה קודקודים או פחות, להוציא K_5, הוא מישורי.*

דרך נוספת להקטנת מספר המקצועות במפה היא <u>הכיווץ</u>: אנו מכווצים מיקצוע על ידי הסרתו והדבקת קצוותיו זה לזה, כמו באיור 7.1, בו הסרנו את המקצוע e והקדקודים x_1 ו־x_2 הפכו ל־x. אם e איננו לולאה, למפה החדשה יהיו מקצוע אחד פחות וקודקוד אחד פחות. אם הוא לולאה, יהיו לה מקצוע אחד פחות ופאה אחת פחות. בכל מקרה, כיווץ מקצוע בגרף מישורי יתן שוב גרף מישורי. כללית, <u>כיווץ</u> של גרף G יהיה כל גרף המתקבל מ־G על ידי סדרת כיווצי מקצועות בזה אחר זה. מכאן נקבל:

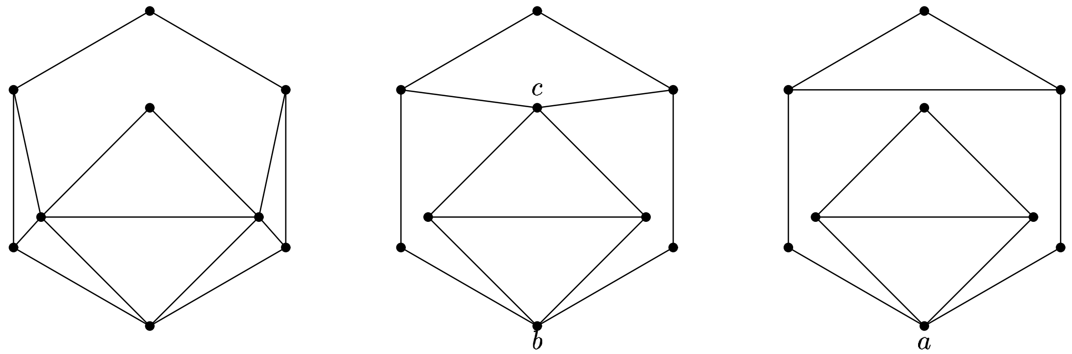
משפט 7.2 *כל כיווץ של גרף מישורי הוא מישורי. לחילופין, אם כיווץ של גרף G איננו מישורי, גם G איננו מישורי.*



איור 7.1: כיווץ של מקצוע במפה



איור 7.2: גרפים לא־מישוריים



איור 7.3: קבוצות ניתוק

כמסקנה מכך, נובע כי גרף פטרסן שבאיור 3.1 (עמוד 9) אינו מישורי, כי נתן לקבל ממנו את K_5 על ידי כיווץ חמשה המקצועות הקושרים את קודקודי המחומש החיצוני לקודקודי המחומש הכוכבי הפנימי.

הוכחנו קודם כי K_5 ו־$K_{3,3}$ אינם מישוריים, והשתמשנו בזאת להוכיח כי כמה גרפים אחרים אינם מישוריים. מה שמפתיע, אולי, היא תגליתו (ב־1930) של המתמטיקאי הפולני קורטובסקי (Kuratowski) כי כל גרף לא מישורי חייב להכיל בתוכו, במובן מסויים, את K_5 או $K_{3,3}$, שנקראים על־כן מאז הגרפים של קורטובסקי.

משפט 7.3 (קורטובסקי, גרסה ראשונה) *גרף G הוא מישורי אם ורק אם אין לו כיווץ המכיל בתוכו את K_5 או $K_{3,3}$ כתת־גרף.*

לעתים, קשה להסתכל בכיווצים כללים של G, מאחר שהם יוצרים קודקודים בעלי ערכיות גבוהה, דהיינו סכום הערכיות של הקודקודים שהודבקו פחות 2 (באיור 7.1, $\rho(x) = \rho(x_1) + \rho(x_2) - 2 = 3 + 4 - 2 = 6$). ברור כי במקרה שאחד מקצוות הקטע שכווץ ערכיותו היא 2, אין שנוי בערכיות, ואפשר להסתכל על כווץ מיוחד זה כהסרה של קודקוד דו־ערכי והדבקת שני המקצועות הנפגשים בו. נקרא לכיווץ מיוחד זה צימצום של קודקוד, וצימצום של גרף G כל גרף המתקבל מ־G על ידי סדרת צימצומי קודקודים בזה אחר זה. הגרסה הבאה של משפט קורטובסקי היא לעיתים שימושית יותר:

משפט 7.4 (קורטובסקי, גרסה שניה) *גרף G הוא מישורי אם ורק אם אין לו תת־גרף המכיל בתוכו את K_5 או $K_{3,3}$ כצימצום.*

תרגיל 7.2 *הראו כי גרף פטרסן אינו מישורי על־ידי מחיקת אחד הקודקודים וכל המקצועות הנפגשים בו, וצמצום כל הקודקודים הדו־ערכיים בתת־הגרף לקבלת $K_{3,3}$.*

תרגיל 7.3 *הראו, בשיטה דומה, כי שני הגרפים שבאיור 7.2 אינם מישוריים. נסו גם להשתמש בגרסה הראשונה של משפט קורטובסקי.*

נעבור עתה לרקע למשפט החשוב השני בפרק זה. נדון עתה בצורה מפורטת יותר במושג הקשירות.

ראינו בפרק 4 (עמוד 11) כי מולטיגרף הוא קשיר אם כל שני קדקדים בו ניתנים לחבור על ידי מסילה. ניתן להגדיר גם את דרגת הקשירות של הגרף. בשם קבוצת ניתוק (cutset) נקרא לקבוצת קודקודים S שהסרתה מן הגרף תהפכו ללא קשיר, כלומר, יש לפחות זוג אחד של קודקודים בגרף, שכל מסילה המחברת אותם פוגשת את S. באיור 7.3, $\{a\}$ ו־$\{b,c\}$ הן קבוצות ניתוק. מולטיגרף G נקרא n־קשיר, אם כל קבוצת ניתוק S מקיימת $|S| \geq n$, כלומר, יש להוריד מ־G לפחות n קודקודים (ומקצועותיהם) כדי להפכו ללא קשיר. באיור 7.3, הגרף השמאלי הוא תלת־קשיר, מאחר שיש להסיר ממנו לפחות שלשה קודקודים כדי להפכו ללא קשיר. ננסח עתה את משפט וויטני (Whitney):

משפט 7.5 (וויטני) *לגרף מישורי תלת־קשיר יש רק אפשרות אחת לקבוצת הפאות, כלומר, מתאימה לו רק מפה אחת.*

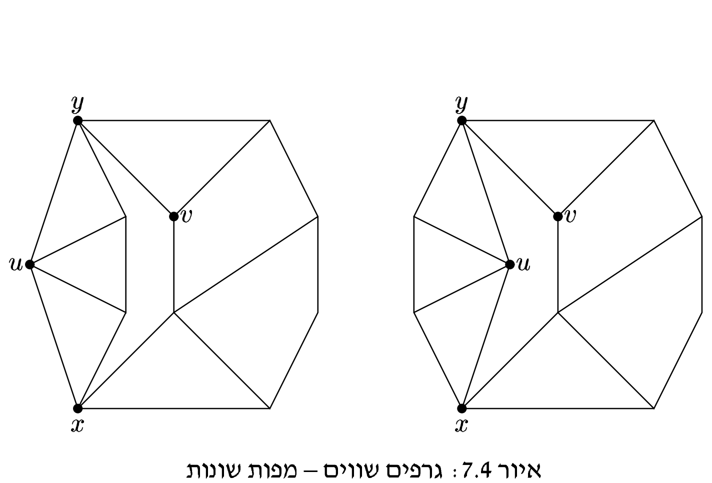
משפט זה מגדיר שיטה לבנית שרטוטים מישוריים שונים לגרפים שאינם תלת־קשירים. ליתר דיוק, יתכן שאפשר לשרטט מחדש חלק מהגרף הקשור על ידי קבוצת ניתוק בת קודקוד אחד או שניים תוך השארת שאר הגרף ללא שינוי. אם נתיחס לגרף הימני באיור 7.3, אפשר לשרטט מחדש את חלקו הפנימי, הקשור לקודקוד a, כך שימצא מחוץ לשאר הגרף. קל לבדוק כי בעוד שבמפה המקורית, נוסף לשלושת המשולשים, יש משושה אחד (הפאה החיצונית) ומתושע אחד, הרי השינוי בשרטוט יהפכם למעושר (חיצוני) ומחומש – שלא היו קודם!

נשיטה דומה ניתן להפוך, כמו באיור 7.4, את חלק הגרף הקשור על ידי הקודקודים x ו־y לשאר הגרף, ולקבל שני שרטוטים שונים של אותו גרף מישורי, המתאימים למפות אחרות (בדקו מדוע!).

משפט וויטני מלמד אותנו למעשה כי שיטה זו היא למעשה היחידה לבניית מפות שונות לאותו גרף – ומכאן שאם אין בגרף קבוצות ניתוק בנות קודקוד אחד או שניים – אין אפשרות לשרטטו במישור בצורה אחרת, כלומר, תוך יצירת פאות אחרות! נשתמש בראיון זה לתאור תהליך לשרטוט גרף במישור או להוכחה שהדבר אינו אפשרי.

יהי $G = (V, E)$ גרף. נשרטט את כל הקודקודים במישור. נסמן את המקצועות במספרים 1, 2, 3, וכו'. נשרטט עתה את המקצועות אחד אחד, החל מ־1, אחריו 2, וכו'. התהליך יפסק אם נשרטט את הגרף בשלמותו, או אם נגיע למקצוע אי אפשר לשרטטו בלי חיתוכים. במקרה זה, נקח את תת־הגרף ששורטט עד כה וננסה, בשיטה שתוארה למעלה, לשרטטו בכל האופנים האפשריים, בתקווה למצוא שרטוט מחדש שיאפשר את העברת המקצוע הנוסף. בגרף השמאלי באיור 7.4, למשל, אי אפשר להעביר מקצוע שיחבר את הקודקודים u ו־v בלי לחתוך מקצועות קיימים – אבל אפשר להעביר מקצוע כזה בשרטוטו מחדש מימין! אם, אחרי מיצוי כל האפשרויות, אי אפשר להעביר את המקצוע, הגרף המקורי אינו מישורי.

תרגיל 7.4 *התאם את התהליך שתארנו לגרפים K_5 ו־$K_{3,3}$:*
(א) הראה שהגרפים המתקבלים על ידי מחיקת מקצוע אחד מ־K_5 או $K_{3,3}$ הם מישוריים.
(ב) הראה שכל אחד מהגרפים שנבנו ב־(א) הם בעלי שרטוט מישורי יחיד.
(ג) הראה ש־K_5 ו־$K_{3,3}$ אינם מישוריים.



איור 7.4: גרפים שווים – מפות שונות