# פרק 3

# ערכיות

בפרק זה נראה איזו אינפורמציה מספרית נתן לאסוף על גרף ואיך נתן ללמוד מאינפורמציה כזאת על מבמה הגרף. אם נתיחס למולטיגרף שבאיור 2.1, נוכל להתחיל בשימנו לב כי יש לו שבעה קודקודים וששה מקצועות. שני מספרים אלה מגדירים את גודל המולטיגרף. עבור מולטיגרף כללי $G = (V, E)$, נסמן מספרים אלה ב־$|V|$ ו־$|E|$ בהתאמה. למעשה, עבור קבוצה כלשהי $S$, נוהגים לסמן ב־$|S|$ את מספר אבריה. לדוגמה, $K_n$, $\Delta_n$ ו־$\Pi_n$ הם בעלי $n$ קודקודים ו־$K_{n,m}$ בעל $n+m$ קודקודים. יתר על כן, בידקו כי ל־$K_n$ יש $n(n-1)/2$ מקצועות, ל־$K_{n,m}$ יש $nm$ מקצועות, ל־$\Delta_n$ יש $n$ מקצועות ול־$\Pi_n$ יש $n-1$ מקצועות.

נוכל ללמוד על מבנה המולטיגרף מאוסף אחר של מספרים, דהיינו, מאוסף מספרי הערכיות של קודקודיו. בשם ערכיות של קודקוד $x$, נקרא למספר הפעמים בו משתתף $x$ כקצה של מקצוע. מספר זה מסומן ב־$\rho(x)$. נדגיש כי לולאה תורמת 2 לערכיות, כך שבמולטיגרף שבאיור 2.1, $b$ הוא בעל ערכיות ארבע. ערכיותו של $a$ היא שלוש. $e$ הוא דו־ערכי. הקודקודים $c$, $d$ ו־$g$ הם חד־ערכיים, או תלויים. לבסוף, $f$ הוא בעל ערכיות אפס, או מבודד. את הערכיות ניתן לקבוע מתוך מטריצת השכנות על ידי חיבור אברי השורה המתאימה לקודקוד הנידון, בזוכרנו שאת אבר האלכסון יש לחבר פעמיים.

מולטיגרף שכל קודקודיו בעלי אותה ערכיות $\rho$ יקרא רגולרי. ראינו כבר כמה דוגמאות לכך: $K_n$ הוא גרף רגולרי מערכיות $\rho = n - 1$, $\Delta_n$ הוא גרף רגולרי מערכיות $\rho = 2$ ואילו $\Pi_n$ אינו רגולרי אלא אם כן $n = 1$ ($\rho = 0$) או $n = 2$ ($\rho = 1$). גרף רגולרי תלת־ערכי יקרא קובי. מקור השם הוא בקוביה, שכל אחד משמונה קודקודיה משמש כקצה לשלשה מתוך שנים־עשר מקצועותיה. באיור 3.1 אנו מדגימים גרפים קוביים אחדים.

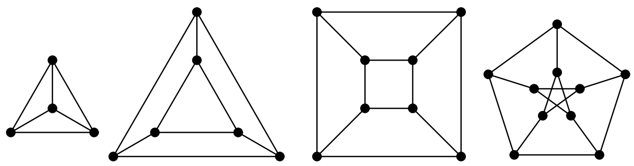
אם נחבר את הערכיות של כל הקודקודים במולטיגרף, נקבל את פעמיים מספר המקצועות. זה לא קשה להווכח: אם נחשוב על חיבור הערכיות כביקור בכל קודקוד בזה אחר זה וספירת המקצועות היוצאים ממנו, נראה כי כל מקצוע נספר פעמיים, פעם אחת מכל אחד מקצותיו. נרשום תוצאה זו בצורה הקומפקטית הבאה:

**משפט 3.1** *בכל מולטיגרף* $G = (V, E)$,

$$\Sigma_{x \in V} \rho(x) = 2|E|$$

נדגים זאת על המולטיגרף באיור 2.1:

$$\rho(a) + \rho(b) + \rho(c) + \rho(d) + \rho(e) + \rho(f) + \rho(g) =$$
$$3 + 4 + 1 + 1 + 2 + 0 + 1 = 12 = 2 \times 6 = 2|E|$$



גרף פטרסן $|V| = 10$ | קוביה $|V| = 8$ | מנסרה משולשת $|V| = 6$ | $K_4$ $|V| = 4$

איור 3.1: גרפים קוביים