פרק 4

עצים

נתבונן עתה במשפחה אחת של גרפים, שנקראים בשם <u>עצים</u>. כדי שנוכל להבין מהו עץ, עלינו להקדים כמה מושגים פשוטים.

יהי $G=(V,E)$ מולטיגרף. מולטיגרף $G'=(V',E')$ הוא תת־מולטיגרף של G (תת־גרף של G אם G הוא גרף) אם $V'\subseteq V$ ו־$E'\subseteq E$, כלומר, אם G' הוא מולטיגרף המורכב מכמה מהקודקודים והמקצועות של G. במיוחד, שני הקצוות של המקצועות ב־E' הם ב־V'.

כמובן למולטיגרף נתון יש תת־מולטיגרפים רבים, וביניהם למשל מסילות Π_n או מעגלים Δ_n מאורכים שונים. אם כל שני קודקודים בגרף ניתנים לקישור על־ידי מסילה, נאמר כי הגרף קשיר. במילים אחרות, הגרף "מורכב מחתיכה אחת".

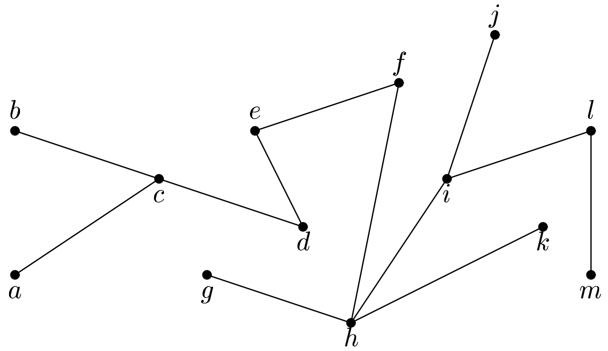
תרגיל 4.1 *מצאו את המעגל הקצר ביותר ואת המעגל הארוך ביותר בגרפים K_n ו־$K_{n,m}$.*

תרגיל 4.2 *הראו כי מולטיגרף הוא דו־צדדי אם ורק אם כל המעגלים בו הם מאורך זוגי.*

הגרפים הפשוטים ביותר הם אלה בלי מעגלים. מולטיגרף קשיר מחוסר מעגלים נקרא בשם <u>עץ</u>. באיור 4.1 אנו מביאים דוגמה לעץ, ובמשפט הבא כמה תכונות חשובות של עצים.

משפט 4.1 *(א) כל תת־מולטיגרף קשיר של עץ הוא עץ.*
(ב) כל עץ הוא גרף.
(ג) כל עץ, פרט לעץ עם קודקוד אחד, מכיל קודקוד תלוי.
(ד) כל עץ ניתן לשרטוט מישורי בלי שמקצועותיו יחתכו.

הוכחה: (א) נכון, כי כל מעגל בתת־מולטיגרף של עץ G הוא מעגל ב־G. לכן, אם ב־G אין מעגלים, גם בכל תת־מולטיגרף שלו אין מעגלים. (ב) נכון, כי לולאות הן מעגלים מאורך 1 וזוג מקצועות כפולים יוצרים מעגל מאורך 2. כדי לברר את (ג), נשים לב כי העץ היחיד עם קודקוד אחד הוא K_1. מחוץ ל־K_1, יהי G עץ כלשהוא. נבחר בקודקוד כלשהו x_1 ונתבונן במסילה הארוכה ביותר המתחילה בו, $(x_1,e_1,x_2,e_2,...,e_{n-1},x_n)$. אזי, ברור כי ערכיות x_n היא לפחות אחד. מצד שני, אין היא יכולה להיות יותר מאחד, כי אם היה מקצוע נוסף e הקושר את x_n לקודקוד אחר x (השונה מ־x_1 כי אחרת $(x_1,e_1,x_2,e_2,...,e_{n-1},x_n,e,x)$ הוא מעגל ב־G!), היתה מתקבלת מסילה ארוכה יותר $(x_1,e_1,x_2,e_2,...,e_{n-1},x_n,e,x)$, בסתירה להנחתנו. לכן, $\rho(x_n)=1$



איור 4.1: עץ