ו־x_n הוא קודקוד תלוי. הוכחת (ד) מבוססת על אינדוקציה על מספר קודקודי העץ: K_1, העץ היחיד עם קודקוד אחד, הוא חסר מקצועות, ובוודאי נתן לשרטטו במשור בלי חיתוכי מקצועות. יהי G עץ בעל n קודקודים ויהי x קודקוד תלוי, שקיים לפי (ג). אם נסיר את x ואת המקצוע שמכיל אותו מ־G, נקבל תת־גרף קשיר של G שנקרא לו G'. לפי (א), G' הוא עץ ובאינדוקציה ניתן לשרטטו במישור בלי חיתוכי מקצועות. ברור שאת הקודקוד והמקצוע הנותרים נתן להוסיף לשרטוט זה בלי לגרום לחיתוכים.

תרגיל 4.3 *האם תוכלו לבנות עץ בעל קודקוד תלוי אחד בדיוק? שני קדקודים תלויים בדיוק?*

תרגיל 4.4 *בנו את כל העצים בעלי חמישה קודקודים או פחות.*

יש כמה דרכים לאפיין עץ. אחת מהם נתונה במשפט הבא:

משפט 4.2 *יהי $G=(V,E)$ מולטיגרף קשיר. אזי, G* ***הוא עץ אם ורק אם*** $|V|-|E|=1$.

הוכחה: יש להראות את נכונותם של שני כוונים. ראשית, נניח כי G הוא עץ ונחשב את $|V|-|E|$. כמו קודם, נתן ליצור מ־G עץ קטן יותר $G'=(V',E')$ על ידי הסרת קודקוד תלוי והמקצוע המכיל אותו. מאחר ש־$|V'|=|V|-1$ ו־$|E'|=|E|-1$ נובע כי $|V|-|E|=|V'|-|E'|$, כלומר, ההפרש בין מספר הקודקודים ומספר המקצועות לא משתנה בתהליך ההסרה. אפשר להמשיך בתהליך עם העץ שהתקבל, וכן הלאה, עד שיתקבל עץ ללא קודקודים תלויים – כלומר K_1. בעץ זה $|V|=1$ ו־$|E|=0$, כלומר $|V|-|E|=1$. לכן, גם בעץ המקורי $|V|-|E|=1$.

בכוון ההפוך, נעיר קודם כי למולטיגרף שבו $|V|>|E|$ יש בהכרח קודקוד בעל ערכיות הקטנה משניים. כי, אחרת, אם כל קודקוד x מקיים $2\le\rho(x)$ נקבל $2|V|\le\Sigma_{x\in V}\rho(x)=2|E|$ או $|V|\le|E|$ בסתירה לנתון. נניח לכן כי $G=(V,E)$ הוא מולטיגרף קשיר המקיים $|V|-|E|=1$. אזי, $|E|=|V|-1$ ולפי ההערה יש ל־G קודקוד מערכיות קטנה משניים. מאחר שהקשירות מונעת קודקודים מבודדים (אלא אם כן $G=K_1$), יש ל־G קודקוד תלוי. נסיים בעזרת תהליך זהה לזה שתארנו קודם: אם נסיר את הקודקוד המבודד והמקצוע שמכיל אותו נקבל מולטיגרף קשיר קטן יותר $G'=(V'E')$ המקיים שוב את התנאי $|V'|-|E'|=1$. נשים לב כי המקצוע שהסרנו אינו יכול להיות חלק ממעגל ב־G ולכן כל מעגל ב־G ישאר גם ב־G'. נחזור על התהליך עד שייתקבל K_1. מאחר ש־K_1 הוא חסר מעגלים, גם המולטיגרף המקורי הוא חסר מעגלים, דהיינו עץ.

תרגיל 4.5 *רשמו סדרה של קודקודים שיש להורידם בזה אחר זה מן העץ שבאיור 4.1 כך שיתקבל* K_1.