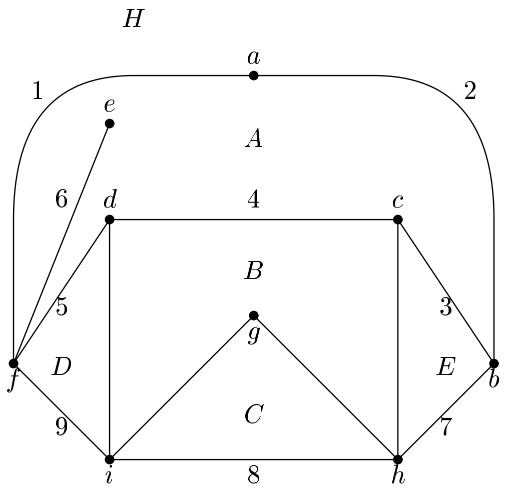
פרק 5

מפות מישוריות



איור **5.1**: מפה מישורית

בשם <u>גרף מישורי</u> נקרא למולטיגרף שניתן לשרטטו במישור בלי שמקצוע אחד יחתוך את משנהו. לגרפים מישוריים שימוש חשוב בתכנון: לכל תכנית רצפה מתאים גרף מישורי, המתקבל על ידי כך שבכל חלל נבחר קודקוד ונקשור שני קודקודים על ידי מקצוע אם יש גישה ישירה בין שני החללים בתכנית.

נתבונן כעת באיור 5.1. מופיע שם גרף מישורי $G=(V,E)$, עם קבוצת הקודקודים $V=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ וקבוצת המקצועות $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,...\}$ (לא כל המקצועות מסומנים בתוית). בעקבות שרטוט הגרף במישור מתקבלת קבוצת עצמים נוספת ־ קבוצת חלקי המישור שנחתכו ממנו על ידי הגרף. עצמים אלה נקראים <u>פאות</u> (faces) וקבוצת הפאות מסומנת ב־F, לדוגמה $F=\{A,B,C,D,E,H\}$. כל פאה מוגדרת באופן מתמטי על־ידי ה<u>שפה</u> שלה, שהיא שרשרת קודקודים ומקצועות. במקרים רבים שפת פאה היא מעגל, כמו במקרה של הפאה B בציור ששפתה המעגל שקודקודיו (d,c,h,g,i,d), או הפאה החיצונית H, ששפתה המעגל $(f,1,a,2,b,7,h,8,i,9,f)$. לעתים, מקצועות מסוימים בשפת הפאה חוזרים פעמיים, כמו למשל הפאה A ששפתה $(f,1,a,2,n,3,b,4,d,5,f,6,e,6,f)$ – המקצוע 6 חוזר פעמיים בסדרה!

<u>מפה</u> M תהיה שלשה של קבוצות (V,E,F), כאשר (V,E) הוא מולטיגרף קשיר, כך שכל מקצוע ב־E שיך לשפת שתי פאות ב־F (או לאותה הפאה פעמיים), וכך שיש שרטוט מישורי של (V,E) שפאותיו מתאימות לאברי F.

יש לפאות המפה ולקודקודי גרף כמה תכונות מקבילות. למשל, נגדיר את <u>הערכיות</u> של פאה כמספר המקצועות שיוצרים את שפתה, כאשר מקצועות המשתתפים בשפה פעמיים יספרו פעמיים. ערכיות פאה f תסומן ב־$\rho^*(f)$, כך שבדוגמה, $\rho^*(H)=5$, $\rho^*(D)=3$, $\rho^*(A)=7$. בהגדרה זו מקבל את המשפט:

משפט 5.1 *בכל מפה* $M=(V,E,F)$

$$\Sigma_{f\in F}\rho^*(f)=2|E|$$