פרק 6

נוסחת אוילר

כפי שכבר ראינו כל עץ הוא גרף מישורי. מאחר שהוא קשיר הוא מגדיר מפה, ומאחר שהוא חסר מעגלים יש במפה זו פאה יחידה, כלומר $|F| = 1$. (זו היא הפאה החיצונית ובשפתה משתתף פעמיים כל אחד ממקצועות העץ, כלומר ערכיותה היא $\rho^* = 2|E|$.) ראינו גם כי כל עץ מקיים את הנוסחה $|V| - |E| = 1$. נוסחה זו כמובן אינה נכונה לגרפים שאינם עצים. אבל, אם נתיחס למפה של העץ, נקבל את הנוסחה $|V| - |E| + |F| = 2$. נוסחה זו מתקיימת לכל המפות, ונקראת נוסחת אוילר, על שם המתמטיקאי השוויצרי לאונרד אוילר (Leonhard Euler, 1707-83).

משפט 6.1 *אם $M = (V, E, F)$ היא מפה, אזי* $|V| - |E| + |F| = 2$.

הוכחה: ראינו כי אם (V, E) עץ, הנוסחה מתקיימת. אם אינו עץ, (V, E) מכיל מעגל. יהי e מקצוע כלשהו של המעגל, ונסיר את e מן הגרף. הגרף שהתקבל יהיה שוב מישורי, עם מקצוע אחד פחות ופאה אחת פחות. נוכל להסיר מקצועות עד שנקבל תת־גרף שהוא עץ. הנוסחה מתקיימת עבור עץ זה. נחזיר עתה את המקצועות בזה אחר זה. עם כל מקצוע שיתווסף, תתווסף גם פאה, לכן $|V| - |E| + |F|$ ישאר שניים.

למרות שנוסחת אוילר היא פשוטה לניסוח ופשוטה להוכחה, היא בעלת חשיבות עצומה. כשימוש ראשון לנוסחה נשים לב, כי אם $G = (V, E)$ גרף מישורי, אזי כל המפות המתקבלות מ־G הן בעלות מספר פאות שווה, דהיינו $|E| - |V| + 2$. שימוש שני יהיה הוכחה קצרה כי הגרפים K_5 ו־$K_{3,3}$ אינם מישוריים.

נניח כי נתן לשרטט את $K_5 = (V, E)$ במישור ולקבל מפה $M = (V, E, F)$. אזי $|V| = 5$ ומתוך $\rho = 4$ נובע $|E| = 10$. מכאן $|F| = |E| - |V| + 2 = 7$. מאחר ש־K_5 הוא מחוסר לולאות ומקצועות כפולים, כל מעגל בו הוא מאורך שלוש לפחות. לכן, לכל פאה f, $3 \leq \rho^*(f)$,

$$21 = 3 \times 7 \leq \Sigma_{f \in F} \rho^*(f) = 2|E| = 20.$$

אבל 21 איננו קטן או שווה מ־20, כלומר ההנחה ש־K_5 מישורי הביאה לסתירה, כלומר ההנחה מוטעית.

במקרה של $K_{3,3}$, יש לנו $|V| = 6$ ומתוך $\rho = 3$ גם $|E| = 9$. לכן, לו היינו יכולים לשרטט אותו במישור ולקבל מפה $M = (V, E, F)$ היתה M מקיימת $|F| = 5$. אבל ל־$K_{3,3}$ אין לולאות, מקצועות כפולים או מעגלים מאורך 3 (בגרף דו צדדי, כל המעגלים הם מאורך זוגי), לכן, לכל פאה f, $4 \leq \rho^*(f)$,

$$20 = 4 \times 5 \leq \Sigma_{f \in F} \rho^*(f) = 2|E| = 18.$$

ושוב סתירה.

כשימוש נוסף למשפט אוילר נראה כיצד נתן למצוא את כל המפות הרגולריות. אם $M = (V, E, F)$ היא מפה רגולרית, אז כל אחד מקודקודיה הוא בעל ערכיות ρ וכל אחת מפאותיה בעלת ערכיות ρ^*. אזי מתקיימות המשוואות

$$\rho|V| = 2|E| = \rho^*|F|$$

נחלץ מכאן את $|V| = 2|E|/\rho$ ו־$|F| = 2|E|/\rho^*$ ונציב בנוסחת אוילר:

$$2 = |V| - |E| + |F| = 2|E|/\rho - |E| + 2|E|/\rho^* = |E|(2/\rho - 1 + 2/\rho^*)$$

או

$$|E| = 2/(2/\rho - 1 + 2/\rho^*) = 2\rho\rho^*/[4 - (\rho - 2)(\rho^* - 2)]$$