פרק 7

משפט קורטובסקי ומשפט וויטני

כאשר נתון מולטיגרף $G = (V, E)$, אנו מעוניינים לקבוע אם נתן לשרטט אותו במישור בלי חיתוכי מקצועות, כלומר, האם קיימת מפה $M = (V, E, F)$? ראינו כבר כי התשובה יכולה להיות שלילית, אפילו עבור גרפים בעלי מספר קודקודים קטן כמו חמישה (K_5) או שישה ($K_{3,3}$) קודקודים. אבל, אם התשובה חיובית, זה מוביל לשאלה נוספת: האם יש יותר ממפה אחת ש־G הוא המולטיגרף שלה? לשתי השאלות חשיבות רבה בארכיטקטורה: אם הגרף המתאים לבעיה ארכיטקטונית אינו ניתן לשרטוט במישור, אי אפשר לפתור אותה בלי הוספת פרוזדורים, למשל. כמוכן, אם לבעיה אחת נוכל להתאים מפות שונות, נוכל גם לקבל פתרונות שונים מהותית (כלומר, שאינם נתנים לקבלה זה מזה על ידי עוות גרידא). בפרק זה נראה שיטות להחלטה אם מולטיגרף נתון הוא מישורי ולבנית כל המפות המתאימות למולטיגרף מישורי. השיטות מבוססות על שני משפטים עמוקים בתורת הגרפים, שלא נוכל להוכיחם כאן. רק הנסוח שלהם מצריך פיתוח מושגים נוספים. לשם פשטות, אנו נגביל את עצמנו בפרק זה לגרפים: מכל מולטיגרף נתן לקבל גרף על ידי מחיקת הלולאות והפיכת כל קבוצת מקצועות כפולים משותפי קצוות למקצוע בודד. אחרי פתרון הבעיה לגבי הגרף, ניתן תמיד להוסיף את הלולאות ואת המקצועות הכפולים.

תהי $M = (V, E, F)$ מפה ו־e מקצוע כלשהוא. אם הסרת e לא פוגעת בקשירות הגרף (e אינו "גשר" בין שני חלקי הגרף) אזי תתקבל מפה חדשה, עם מקצוע אחד פחות ופאה אחת פחות, אך עדיין מישורית כמובן. אם לעומת זאת בקצה e קודקוד תלוי x, הסרתם של e ו־x יתנו מפה חדשה, עם מקצוע אחד פחות וקודקוד אחד פחות. מאחר שכל תת־גרף קשיר של גרף G יכול להתקבל באחת מצורות אלה, נקבל:

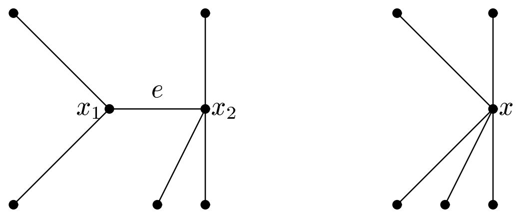
משפט 7.1 *כל תת־גרף קשיר של גרף מישורי הוא מישורי. לחילופין, אם תת־גרף קשיר של גרף G איננו מישורי, גם G אינו מישורי.*

כמסקנה מכך, נובע כי K_n אינו מישורי אם n הוא לפחות 5 (כי K_5 הוא תת־גרף שלו) ו־$K_{n,m}$ איננו מישורי אם n ו־m שניהם לפחות 3 (כי $K_{3,3}$ הוא תת־גרף שלו). שימו לב כי K_1, K_2, K_3, K_4 הם מישוריים, וכך גם $K_{1,m}$ ו־$K_{2,m}$ ל־m כלשהו (איורים 2.2 ו־2.3, עמוד 7).

תרגיל 7.1 *הראו שכל גרף בעל חמישה קודקודים או פחות, להוציא K_5, הוא מישורי.*

דרך נוספת להקטנת מספר המקצועות במפה היא הכיווץ: אנו מכווצים מיקצוע על ידי הסרתו והדבקת קצוותיו זה לזה, כמו באיור 7.1, בו הסרנו את המקצוע e והקדקודים x_1 ו־x_2 הפכו ל־x. אם e איננו לולאה, למפה החדשה יהיו מקצוע אחד פחות וקודקוד אחד פחות. אם הוא לולאה, יהיו לה מקצוע אחד פחות ופאה אחת פחות. בכל מקרה, כיווץ מקצוע בגרף מישורי יתן שוב גרף מישורי. כללית, כיווץ של גרף G יהיה כל גרף המתקבל מ־G על ידי סדרת כיווצי מקצועות בזה אחר זה. מכאן נקבל:

משפט 7.2 *כל כיווץ של גרף מישורי הוא מישורי. לחילופין, אם כיווץ של גרף G איננו מישורי, גם G איננו מישורי.*



איור 7.1: כיווץ של מקצוע במפה