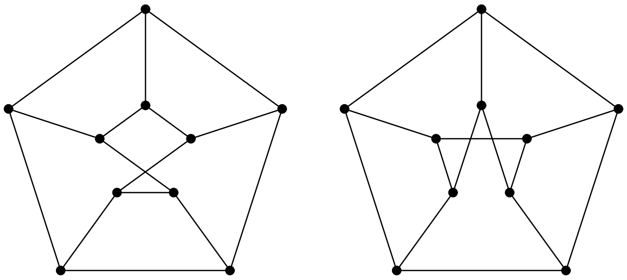
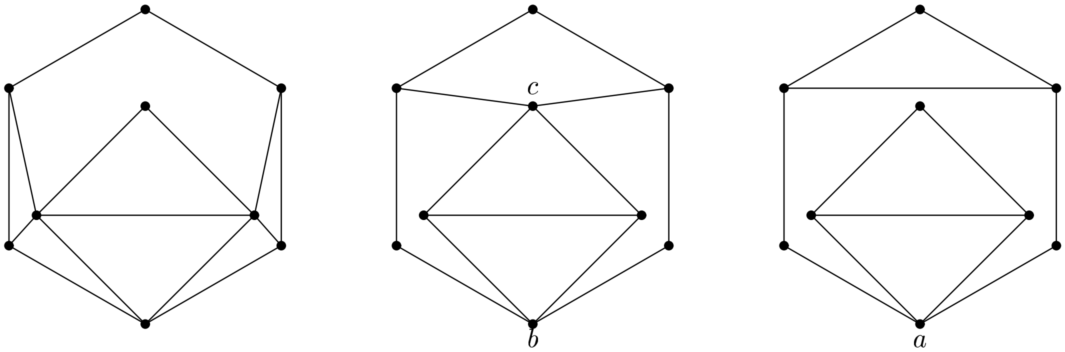


איור 7.2 : גרפים לא־מישוריים



איור 7.3 : קבוצות ניתוק

כמסקנה מכך, נובע כי גרף פטרסן שבאיור 3.1 (עמוד 9) אינו מישורי, כי נתן לקבל ממנו את K_5 על ידי כיווץ חמשה המקצועות הקושרים את קודקודי המחומש החיצוני לקודקודי המחומש הכוכבי הפנימי.

הוכחנו קודם כי K_5 ו־$K_{3,3}$ אינם מישוריים, והשתמשנו בזאת להוכיח כי כמה גרפים אחרים אינם מישוריים. מה שמפתיע, אולי, היא תגליתו (ב־1930) של המתמטיקאי הפולני קורטובסקי (Kuratowski) כי כל גרף לא מישורי חייב להכיל בתוכו, במובן מסויים, את K_5 או $K_{3,3}$, שנקראים על־כן מאז הגרפים של קורטובסקי.

משפט 7.3 (קורטובסקי, גרסה ראשונה) *גרף G הוא מישורי אם ורק אם אין לו כיווץ המכיל בתוכו את K_5 או $K_{3,3}$ כתת־גרף.*

לעתים, קשה להסתכל בכיווצים כללים של G, מאחר שהם יוצרים קודקודים בעלי ערכיות גבוהה, דהיינו סכום הערכיות של הקודקודים שהודבקו פחות 2 (באיור 7.1, $\rho(x) = \rho(x_1) + \rho(x_2) - 2 = 3 + 4 - 2 = 6$). ברור כי במקרה שאחד מקצוות הקטע שכווץ ערכיותו היא 2, אין שנוי בערכיות, ואפשר להסתכל על כווץ מיוחד זה כהסרה של קודקוד דו־ערכי והדבקת שני המקצועות הנפגשים בו. נקרא לכיווץ מיוחד זה צימצום של קודקוד, וצימצום של גרף G כל גרף המתקבל מ־G על ידי סדרת צימצומי קודקודים בזה אחר זה. הגרסה הבאה של משפט קורטובסקי היא לעיתים שימושית יותר :

משפט 7.4 (קורטובסקי, גרסה שניה) *גרף G הוא מישורי אם ורק אם אין לו תת־גרף המכיל בתוכו את K_5 או $K_{3,3}$ כצימצום.*

תרגיל 7.2 *הראו כי גרף פטרסן אינו מישורי על־ידי מחיקת אחד הקודקודים וכל המקצועות הנפגשים בו, וצמצום כל הקודקודים הדו־ערכיים בתת־הגרף לקבלת $K_{3,3}$.*

תרגיל 7.3 *הראו, בשיטה דומה, כי שני הגרפים שבאיור 7.2 אינם מישוריים. נסו גם להשתמש בגרסה הראשונה של משפט קורטובסקי.*

נעבור עתה לרקע למשפט החשוב השני בפרק זה. נדון עתה בצורה מפורטת יותר במושג הקשירות.

ראינו בפרק 4 (עמוד 11) כי מולטיגרף הוא קשיר אם כל שני קדקדים בו ניתנים לחבור על ידי מסילה. ניתן להגדיר גם את דרגת הקשירות של הגרף. בשם קבוצת ניתוק (cutset) נקרא לקבוצת קודקודים S שהסרתה מן הגרף תהפכו ללא קשיר, כלומר, יש לפחות זוג אחד של קודקודים בגרף, שכל מסילה המחברת אותם פוגשת את S. באיור 7.3, $\{a\}$ ו־$\{b, c\}$ הן קבוצות ניתוק. מולטיגרף G נקרא n־קשיר, אם כל קבוצת ניתוק S מקיימת $|S| \geq n$, כלומר, יש להוריד מ־G לפחות n קודקודים (ומקצועותיהם) כדי להפכו ללא קשיר. באיור 7.3, הגרף השמאלי הוא תלת־קשיר, מאחר שיש להסיר ממנו לפחות שלשה קודקודים כדי להפכו ללא קשיר. ננסח עתה את משפט וויטני (Whitney) :