משפט 7.5 (וויטני) *לגרף מישורי תלת־קשיר יש רק אפשרות אחת לקבוצת הפאות, כלומר, מתאימה לו רק מפה אחת.*

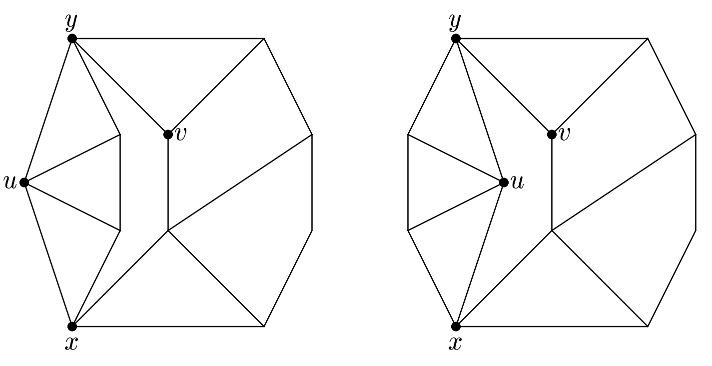
משפט זה מגדיר שיטה לבנית שרטוטים מישוריים שונים לגרפים שאינם תלת־קשירים. ליתר דיוק, יתכן שאפשר לשרטט מחדש חלק מהגרף הקשור על ידי קבוצת ניתוק בת קודקוד אחד או שניים תוך השארת שאר הגרף ללא שינוי. אם נתיחס לגרף הימני באיור 7.3, אפשר לשרטט מחדש את חלקו הפנימי, הקשור לקודקוד a, כך שימצא מחוץ לשאר הגרף. קל לבדוק כי בעוד שבמפה המקורית, נוסף לשלושת המשולשים, יש משושה אחד (הפאה החיצונית) ומתושע אחד, הרי השינוי בשרטוט יהפכם למעושר (חיצוני) ומחומש – שלא היו קודם!

נשיטה דומה ניתן להפוך, כמו באיור 7.4, את חלק הגרף הקשור על ידי הקודקודים x ו־y לשאר הגרף, ולקבל שני שרטוטים שונים של אותו גרף מישורי, המתאימים למפות אחרות (בדקו מדוע!).

משפט וויטני מלמד אותנו למעשה כי שיטה זו היא למעשה היחידה לבניית מפות שונות לאותו גרף – ומכאן שאם אין בגרף קבוצות ניתוק בנות קודקוד אחד או שניים – אין אפשרות לשרטטו במישור בצורה אחרת, כלומר, תוך יצירת פאות אחרות! נשתמש בראיון זה לתאור תהליך לשרטוט גרף במישור או להוכחה שהדבר אינו אפשרי.

יהי $G = (V, E)$ גרף. נשרטט את כל הקודקודים במישור. נסמן את המקצועות במספרים 1, 2, 3, וכו׳. נשרטט עתה את המקצועות אחד אחד, החל מ־1, אחריו 2, וכו׳. התהליך יפסק אם נשרטט את הגרף בשלמותו, או אם נגיע למקצוע אי אפשר לשרטטו בלי חיתוכים. במקרה זה, נקח את תת־הגרף ששורטט עד כה וננסה, בשיטה שתוארה למעלה, לשרטטו בכל האופנים האפשריים, בתקווה למצוא שרטוט מחדש שיאפשר את העברת המקצוע הנוסף. בגרף השמאלי באיור 7.4, למשל, אי אפשר להעביר מקצוע שיחבר את הקודקודים u ו־v בלי לחתוך מקצועות קיימים – אבל אפשר להעביר מקצוע כזה בשרטוטו מחדש מימין! אם, אחרי מיצוי כל האפשרויות, אי אפשר להעביר את המקצוע, הגרף המקורי אינו מישורי.

תרגיל 7.4 *התאם את התהליך שתארנו לגרפים K_5 ו־$K_{3,3}$:*
(א) הראה שהגרפים המתקבלים על ידי מחיקת מקצוע אחד מ־K_5 או $K_{3,3}$ הם מישוריים.
(ב) הראה שכל אחד מהגרפים שנבנו ב־(א) הם בעלי שרטוט מישורי יחיד.
(ג) הראה ש־K_5 ו־$K_{3,3}$ אינם מישוריים.



איור 7.4: גרפים שווים – מפות שונות